

## Elektromagnetno polje

### Naloga 1: Sevanje tokovne zanke (magnetnega dipola)

Tokovna zanka z radijem  $a \ll \lambda$  se nahaja v ravnini  $x - y$ , po njej pa teče tok  $I = I_0 \cos(\omega t)$ . Podobno kot pri kratki dipolni anteni izračunajte  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{S}$ ,  $P$  in  $\Re Z$ .

### Naloga 2: Multipolni razvoj EM valovanja

Podobno kot statična polja, lahko tudi izsevano elektromagnetno valovanje razvijemo po multipolnih momentih. Razvoj je mdr. pomemben v atomski in jedrski fiziki, kjer sprememba vrtilne količine pri nekem prehodu določi prostorsko odvisnost porazdelitve fotonov.

- a) Pokażite, da iz Maxwellovih enačb v vakuumu sledi, da za električno in magnetno polje velja

$$(\Delta + k^2)(\vec{r} \cdot \vec{E}) = 0 \qquad (\Delta + k^2)(\vec{r} \cdot \vec{B}) = 0 .$$

- b) Pokażite, da za Laplaceov operator velja

$$\Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{L^2}{r^2} \psi$$

pri čemer je  $\vec{L}$  operator vrtilne količine,  $L = \frac{1}{i} \vec{r} \times \vec{\nabla}$ .

- c) Pokażite, da lahko rešitve zgornjih enačb zapišemo kot

$$\vec{r} \cdot \vec{B}_{lm} = \frac{l(l+1)}{ck} h_l(kr) Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}$$

kjer so  $h_l(x)$  sferične Hanklove funkcije in  $Y_{lm}$  krogelne funkcije. Analogno velja za  $\vec{E}$ . Pri tem upoštevajte, da je  $L^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}$ .

- d) Pokażite, da sta celotni polji, ki rešita zgornjo enačbo,

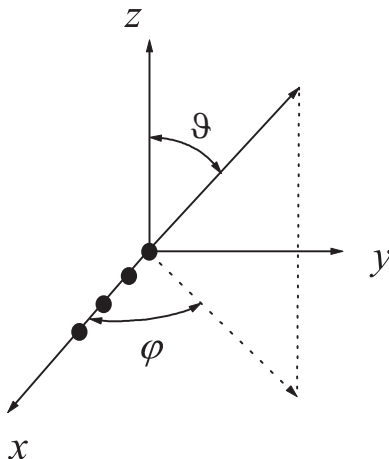
$$\vec{E}_{lm}^{(M)} = h_l(kr) \vec{L} Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t} \qquad \vec{B}_{lm}^{(M)} = -\frac{i}{ck} \vec{\nabla} \times \vec{E}_{lm}^{(M)} .$$

Podobno zvezo lahko izpeljemo tudi za rešitve, kjer izhajamo iz longitudinalne komponente polja  $\vec{E}$ .

- e) V limiti  $x \rightarrow \infty$  velja  $h_l^{(1)}(x) \approx (-i)^{l+1} \frac{1}{x} e^{ix}$ . Določite kotno odvisnost polj  $\vec{E}$  in  $\vec{B}$  za obe vrsti rešitev. Določite tudi kotno porazdelitev izsevane moči.

### Naloga 3: Sipanje

Na sistem  $N$  atomov z izotropno električno polarizirnostjo  $\alpha$  posvetimo z linearno polariziranim elektromagnetnim valovanjem, ki ga opišemo z  $\vec{E} = (0, 0, E_0 \exp(i(kx - \omega t)))$ . Atomi so nanizani v verigi vzdolž  $x$ -osi kot to kaže slika. Razdalja med posameznimi atomi je  $a = \lambda/3$ . Izračunajte kotno porazdelitev intenzitete izsevanega elektromagnetnega valovanja kot funkcijo kotov  $\vartheta$  in  $\varphi$ .



---

Ob vprašanjih se lahko obrnete na asistenta:

Andrej Vilfan  
Tel.: 477-3874  
*andrej.vilfan@ijs.si*

Liste z nalogami najdete na spletni strani

<http://svizec.ijs.si/avilfan/emp/>