

Elektromagnetno polje

Naloga 1: Kratka dipolna antena

V dipolni anteni, ki poteka v smeri osi z od $-L/2$ do $L/2$, je jakost električnega toka podana z odvisnostjo

$$I(z) = I_0 \cos(\omega t) \left(1 - \frac{|z|}{L/2}\right).$$

Tok torej linearno pojema od sredine antene (kjer je priključena na napajalni kabel) proti robu. Pri tem velja, da je $L \ll \lambda$, kjer je $\lambda = c/\omega$, zato govorimo o kratkem dipolu.

Uporabite enačbo za potencial A v sevalnem približku (s predavanj) in za razdalje $r \gg \lambda$ izračunajte $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{S}$, celotno izsevano moč, ter realni del impedance Z . Slednjo določite iz enačbe $P = \langle UI \rangle$, kjer je $U = ZI$.

Naloga 2: Sevanje tokovne zanke (magnetnega dipola)

Tokovna zanka z radijem $a \ll \lambda$ se nahaja v ravnini $x-y$, po njej pa teče tok $I = I_0 \cos(\omega t)$. Podobno kot pri kratki dipolni anteni izračunajte $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{S}$, P in $\Re Z$.

Naloga 3: Sipanje

Elektromagnetno valovanje oblike $\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 \hat{e}_x e^{i(-kz - \omega t)}$ se odbija od idealno prevodne plošče, ki leži v ravnini $x-y$. Na razdalji d nad ravnino se nahaja delec z električno polarizirnostjo α ($p = \alpha E$).

Izračunajte kotno porazdelitev gostote energijskega toka sipanega valovanja kot funkcijo kotov ϑ in φ .

Naloga 4: Multipolni razvoj EM valovanja

Podobno kot statična polja, lahko tudi izsevano elektromagnetno valovanje razvijemo po multipolnih momentih. Razvoj je mdr. pomemben v atomski in jedrski fiziki, kjer sprememba vrtilne količine pri nekem prehodu določi prostorsko odvisnost porazdelitve fotonov.

- a) Pokažite, da iz Maxwellovih enačb v vakuumu sledi, da za električno in magnetno polje velja

$$(\Delta + k^2)(\vec{r} \cdot \vec{E}) = 0 \qquad (\Delta + k^2)(\vec{r} \cdot \vec{B}) = 0.$$

- b) Pokažite, da za Laplaceov operator velja

$$\Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{L^2}{r^2} \psi$$

pri čemer je $\vec{L}$ operator vrtilne količine, $L = \frac{1}{i} \vec{r} \times \vec{\nabla}$.

- c) Pokažite, da lahko rešitve zgornjih enačb zapišemo kot

$$\vec{r} \cdot \vec{B}_{lm} = \frac{l(l+1)}{ck} h_l(kr) Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}$$

kjer so $h_l(x)$ sferične Hanklove funkcije in Y_{lm} krogelne funkcije. Analogno velja za $\vec{E}$. Pri tem upoštevajte, da je $L^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}$.

d) Pokažite, da sta celotni polji, ki rešita zgornjo enačbo,

$$\vec{E}_{lm}^{(M)} = h_l(kr) \vec{L} Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t} \qquad \vec{B}_{lm}^{(M)} = -\frac{i}{ck} \vec{\nabla} \times \vec{E}_{lm}^{(M)} .$$

Podobno zvezo lahko izpeljemo tudi za rešitve, kjer izhajamo iz longitudinalne komponente polja $\vec{E}$.

e) V limiti $x \rightarrow \infty$ velja $h_l^{(1)}(x) \approx (-i)^{l+1} \frac{1}{x} e^{ix}$. Določite kotno odvisnost polj $\vec{E}$ in $\vec{B}$ za obe vrsti rešitev. Določite tudi kotno porazdelitev izsevane moči.

Ob vprašanjih se lahko obrnete na asistenta:

Andrej Vilfan
Tel.: 477-3874
andrej.vilfan@ijs.si

Liste z nalogami najdete na spletni strani

<http://svizec.ijs.si/avilfan/emp/>