Asist. Andrej Vilfan

17. 5. 2013

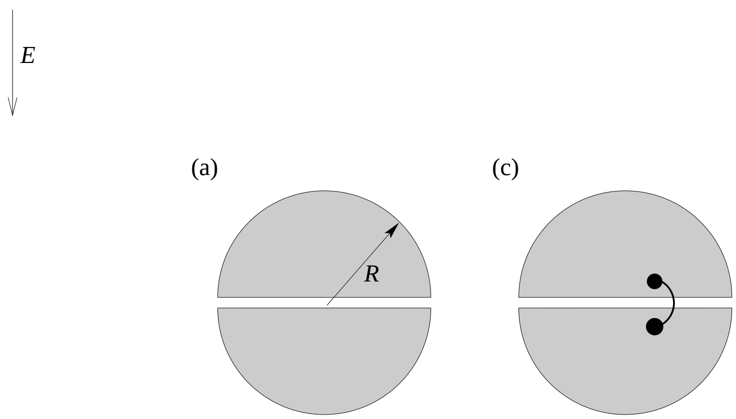
Elektromagnetno polje: 2. pisni izpit (rešitve)

Naloga 1:
Prevodna z radijem R je v ravnini $x-y$ prerezana na dve polovici, ki sta med seboj izolirani, špranja med njima pa je zelo tanka. Na začetku sta polovici nenabiti. Potem ju postavimo v zunanje polje $\vec{E} = -E_0 \hat{e}_z$.

a) Določite elektrostatski potencial φ okoli krogle ter površinsko gostoto induciranega naboja σ.

b) Izračunajte silo, ki deluje med polovicama krogle. Povejte, ali je privlačna ali odbojna.

c) Sedaj obe polovici električno sklenemo. Kolikšna je sedaj sila in v katero smer deluje?



Napotek: Ker je razdalja med polovicama majhna, lahko pri nalogi (a) napetost med polovicama zanemarimo. Priporočam uporabo napetostnega tenzorja tik ob površini polkrogle.

Rešitev:
(a) Zunanje polje ustreza potencialu $\varphi_0 = E_0 z$ oziroma v krogelnih koordinatah $\varphi_0 = E_0 r\cos\theta$. Ker je napetost na reži zanemarljiva, mora biti potencial na celotni krogli konstanten. Prispevek površinskega naboja na krogli k potencialu mora imeti torej enako kotno odvisnost, tako da je celoten potencial zunaj krogle

$$\varphi = E_0 r\cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta \; . \tag{1}$$

Ker mora biti φ pri $r=R$ neodvisen od θ velja $B_1 = -E_0R^3$ in s tem

$$\varphi = E_0 r\cos\theta - \frac{E_0R^3}{r^2}\cos\theta \; . \tag{2}$$

Površinsko gostoto naboja na zunanji površini izračunamo po Gaussovem izreku

$$\sigma = \epsilon_0 E_\perp = -\epsilon_0 \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_R = -3\epsilon_0 E_0\cos\theta \; . \tag{3}$$

Naboj na površini reže med polovicama izračunamo iz pogoja, da je celoten naboj na vsaki polkrogli nič. Naboj na zunanji površini zgornje polkrogle je

$$e = \int_0^1 d(\cos\theta) 2\pi R^2 \sigma(\theta) = \int_0^1 d(\cos\theta) 2\pi R^2(-3\epsilon_0 E_0\cos\theta) = -3\pi\epsilon_0 E_0 R^2 \; . \tag{4}$$

Ker je reža enakomerno nabita (deluje kot tanek ploščat kondenzator) je naboj na zgornji površini $\sigma_R \pi R^2 = -e$. Torej

$$\sigma_R = 3\epsilon_0 E_0 \; . \tag{5}$$

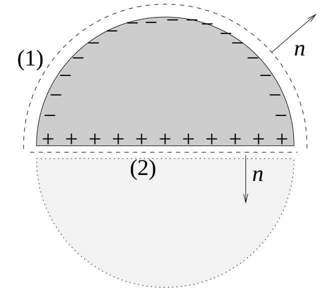
Iz Gaussovega izreka dobimo še polje v reži

$$E_R = \sigma_R/\epsilon_0 = 3E_0 \; . \tag{6}$$

(b) Zaradi simetrije ima sila na zgornjo polkroglo lahko le smer z. Izračunamo jo z napetostnim tenzorjem

$$F_z = \oint \hat{e}_z T \hat{n} dS = \oint \hat{e}_z \epsilon_0 (\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2}E^2)\hat{n} dS = \oint \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \hat{e}_z \hat{n} dS \; . \tag{7}$$

Zadnja enakost velja, ker je na površini prevodnega telesa vedno $\vec{E} \parallel \hat{n}$. Sedaj ločeno izračunamo integral po zunanji površini polkrogle ter po reži.



$$\begin{aligned} F_z^{(1)} &= \int_0^1 d(\cos\theta)\, 2\pi R^2 \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2(\theta) \cos\theta \\ &= \pi R^2 \epsilon_0 \int_0^1 d(\cos\theta) (3E_0 \cos\theta)^2 \cos\theta = \frac{9}{4}\pi R^2 \epsilon_0 E_0^2 \; . \end{aligned} \tag{8}$$

Za integral po ploskvi ob reži velja

$$F_z^{(2)} = -\pi R^2 \frac{1}{2}\epsilon_0 E_R^2 = -\frac{9}{2}\pi R^2 \epsilon_0 E_0^2 \; . \tag{9}$$

Skupna sila je $F_z^{(1)} + F_z^{(2)} = -\frac{9}{4}\pi R^2 \epsilon_0 E_0^2$. Ker na zgornjo polovico deluje v negativni z smeri pomeni, da je privlačna.

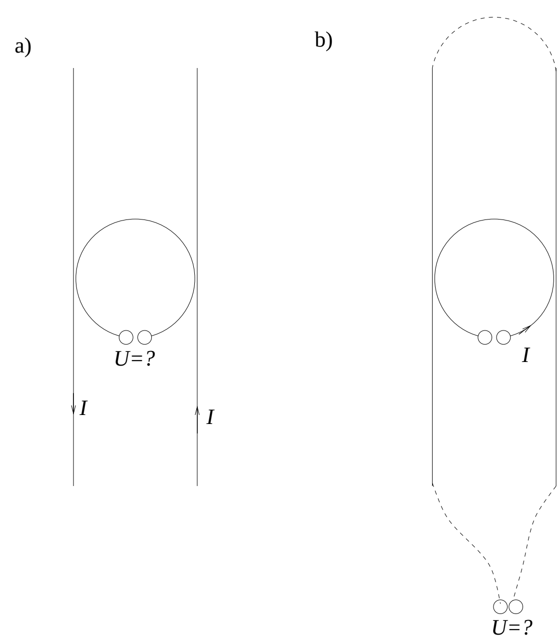
(c) Edina razlika je sedaj v tem, da v reži ni več polja. Sila na zgornjo polovico je podana z $F_z^{(1)} = \frac{9}{4}\pi R^2 \epsilon_0 E_0^2$. Ker je pozitivna pomeni, da polovici vleče narazen (poleg interakcije med polovicama k tej sili prispeva sicer tudi interakcija z zunanjim poljem).

Naloga 2:

Dolgi tanki ravni žici se nahajata na medsebojni razdalji $2a$, po njiju pa tečeta nasprotna tokova s časovno odvisnostjo $I = I_0 \cos(\omega t)$. Med njima se nahaja krožna zanka z radijem a, ki je od obeh vodnikov izolirana. Zanka je na enem mestu prekinjena z merilcem napetosti.

a) Določite časovno odvisnost inducirane napetosti na notranji zanki. Računajte v kvazistatičnem približku.

b) Sedaj situacijo obrnemo in na notranjo zanko priključimo tok $I_0 \cos(\omega t)$ ter merimo inducirano napetost med zunanjima vodnikoma. Spet določite časovno odvisnost te napetosti.



Rešitev:
(a) Izračunamo najprej magnetni pretok Φ skozi notranjo zanko. Polje, ki ga povzročata oba ravna vodnika je pravokotno na ravnino zanke in ima velikost

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right) = \frac{2a\mu_0 I}{2\pi(a^2-x^2)} \; . \tag{10}$$

Prvi člen je prispevek desnega vodnika, drugi pa levega. Pretok izračunamo kot integral po površini notranje zanke. Ker je polje odvisno le od koordinate x je računanje najpreprostejše v kartezičnih koordinatah.

$$\begin{aligned}\Phi &= \int B dS = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\, B(x) = \int_{-a}^{a} dx\, 2\sqrt{a^2-x^2}\frac{2a\mu_0 I}{2\pi(a^2-x^2)} \\ &= \frac{2a\mu_0 I}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{2a\mu_0 I}{\pi}(\arcsin(1) - \arcsin(-1)) = 2\mu_0 I a\end{aligned} \tag{11}$$

Inducirana napetost je

$$U = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \omega I_0 2\mu_0 a \sin(\omega t) \; . \tag{12}$$

(b) Ker za medsebojno induktivnost dveh zank velja $L_{12} = L_{21}$, je rezultat enak kot pri prvem primeru.

Naloga 3:
Elektromagnetno valovanje oblike $\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}$ vpada na sistem dveh sipalcev, ki se nahajata v točkah $(0,0,d)$ in $(0,0,-d)$. Velja $\vec{k} = k(\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$ in $\vec{E}_0 = E_0(\cos\alpha, 0, -\sin\alpha)$. Sipalca sta anizotropna in se polarizirata le v smeri z, torej $\vec{p} = \hat{e}_z\tilde{\alpha}E_z$.
Izračunajte porazdelitev gostote energijskega toka sipanega valovanja ($dP/d\Omega$) kot funkcijo kota ϑ ter skupen energijski tok sipanega valovanja (P).

Rešitev:
Za polarizacijo zgornjega (spodnjega) sipalca dobimo

$$\vec{p}_{1,2} = \hat{e}_z\tilde{\alpha}E_0(-\sin\alpha)e^{i(\pm kd\cos\alpha - \omega t)} \tag{13}$$

Za vsak dipol posebej uporabimo izraz s predavanj (z lista):

$$\vec{B} \cong -\frac{\mu_0}{4\pi c|\vec{r}|}\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\times\ddot{\vec{p}}(t - \frac{|\vec{r}|}{c})\right) \tag{14}$$

Razdalja od dipola 1 do opazovalca je pri tem $r_1 \approx r - d\cos\theta$. Tako dobimo za prispevek prvega dipola

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0\omega^2 p}{4\pi c r}\,(\hat{n}\times\hat{e}_z)\, e^{i(kr + kd\cos\alpha - kd\cos\theta - \omega t)} \tag{15}$$

kjer je $p = \tilde{\alpha}E_0\sin\alpha$ in analogno drugega

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0\omega^2 p}{4\pi c r}\,(\hat{n}\times\hat{e}_z)\, e^{i(kr - kd\cos\alpha + kd\cos\theta - \omega t)} \tag{16}$$

Vsota je torej

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\omega^2 p}{4\pi c r}(\hat{n}\times\hat{e}_z)e^{i(kr-\omega t)}(e^{i(kd(\cos\theta-\cos\alpha))} + e^{-ikd(\cos\theta-\cos\alpha)} = \frac{\mu_0\omega^2 p}{2\pi c r}\sin\theta(-\hat{e}_\phi)\cos(kd(\cos\theta - \cos\alpha) \; . \tag{17}$$

Ker so na veliki razdalji valovi skoraj ravni, uporabimo

$$\vec{P} = \hat{n}\frac{c}{2\mu_0}\vec{B}\vec{B}^* = \frac{\mu_0\omega^4 p^2}{8\pi^2 c r^2}\sin\theta\cos^2(kd(\cos\theta - \cos\alpha))\ . \tag{18}$$

Rezultat:

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2\hat{n}\vec{P} = \frac{\mu_0\omega^4\tilde{\alpha}^2 E_0^2}{8\pi^2 c}\sin^2\alpha\sin^2\theta\cos^2(kd(\cos\theta - \cos\alpha))\ . \tag{19}$$

$$P = 2\pi\int_{-1}^{1}\frac{dP}{d\Omega}d(\cos\theta) \tag{20}$$

Za izračun celotne moči potrebujemo integral

$$\int_{-1}^{1} du(1-u^2)\cos^2(kd(u-b)) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} du(1-u^2)(1+\cos(2kd(u-b))) \tag{21}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} du(1-u^2)(1+\cos(2kdu)\cos(2kdb) + \underbrace{\sin(2kdu)\sin(2kdb)}_{=0 \text{ po integraciji}}) \tag{22}$$

$$= \frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3} + \cos(2kdb)\left(\frac{1}{2kd}\sin(2kdu) - \frac{2u}{(2kd)^2}\cos(2kdu) - \left(\frac{u^2}{2kd} - \frac{2}{(2kd)^3}\right)\sin(2kdu)\right)\right)\Bigg|_{-1}^{1} \tag{23}$$

$$= \frac{2}{3} + \cos(2kdb)(-\frac{\cos(2kd)}{2(kd)^2} + \frac{\sin(2kd)}{4(kd)^3}) \tag{24}$$

In s tem:

$$P = \frac{\mu_0\omega^4\tilde{\alpha}^2 E_0^2}{4\pi c}\sin^2\alpha\left(\frac{2}{3} + \cos(2kd\cos\alpha)\left(\frac{\sin(2kd)}{4(kd)^3} - \frac{\cos(2kd)}{2(kd)^2}\right)\right) \tag{25}$$