Asist. Andrej Vilfan

16. 1. 2013

Elektromagnetno polje: 2. kolokvij (rešitve)

Naloga 1:
Nad idealno prevodno ploščo (pri $z = 0$) se nahaja medij, v katerem je dielektrična konstanta odvisna od višine $\epsilon = \epsilon(z)$.

a) Pokažite, da lahko Maxwellove enačbe rešimo z nastavkom $\mathbf{E} = F(z)\hat{e}_y e^{i(kx-\omega t)}$, kjer je F neka skalarna funkcija. Nastavek opisuje horizontalno polarizirano valovanje (iskanja vertikalno polariziranih rešitev naloga ne zahteva). Zapišite diferencialno enačbo za funkcijo $F(z)$ pri danem k in ω. Navedite tudi robni pogoj, ki ga mora izpolnjevati funkcija $F(z)$.

b) Dielektrična konstanta naj ima sedaj odvisnost $\epsilon(z) = \epsilon(1-(az)^2)$, kjer je a neka konstanta. Z nastavkom $ze^{-\beta z^2}$ poiščite osnovno rešitev enačbe za F in določite disperzijsko relacijo ($k(\omega)$).

Rešitev:
Opomba: Naloga opisuje npr. širjenje dolgih radijskih valov vzdolž zemeljske površine, ki jo obravnavamo kot idealen prevodnik, ionosfera nad njo pa ima dielektrično konstanto, ki pada z višino. Na podoben način pa lahko opišemo tudi širjenje svetlobe v optičnem vlaknu, pri katerem lomni količnik pada od sredine proti robu (vendar imamo potem cilindrično geometrijo).
Za polje $\mathbf{D}$ velja $\mathbf{D} = \epsilon(z)\epsilon_0 F(z) e^{i(kx-\omega t)}\hat{e}_y$ in s tem

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0\ . \tag{1}$$

Iz istega razloga sledi tudi $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0$ (vendar samo za horizontalno polarizirano valovanje, ne splošno!). Enačbo

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2}$$

izpolnimo z $\mathbf{B} = \frac{1}{i\omega}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}$ - ekspliciten izračun ni potreben. Ker je $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = 0$, je tudi $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ s tem izpolnjena. Ostane še zadnja Maxwellova enačba,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{3}$$

ki skupaj z zgornjim izrazom za $\mathbf{B}$ pomeni

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = \omega^2 \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} \tag{4}$$

oziroma z zvezo $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}$

$$\Delta \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(z)\mathbf{E} \tag{5}$$

ter eksplicitno

$$(-k^2 F(z) + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2}) = -\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(z)F(z)\ . \tag{6}$$

Diferencialna enačba je torej

$$F''(z) + \left(\frac{\omega^2 \epsilon(z)}{c^2} - k^2\right) F(z) = 0\ . \tag{7}$$

Robni pogoj pa je $E_x(0) = E_y(0) = 0$ in s tem $F(0) = 0$.
Opomba: enačba je matematično ekvivalentna Schrödingerjevi enačbi v 1D, pri čemer $-k^2$ ustreza energiji delca ter $-\epsilon(z)$ potencialu. Če ϵ z višino pada dobimo pri dovolj velikem k vezana stanja.
Sedaj vstavimo $\epsilon(z) = \epsilon(1-(az)^2)$ (v kvantno-mehanski analogiji ustreza problemu harmoničnega oscilatorja). Iz nastavka $F = ze^{-\beta z^2}$ (gre za prvo antisimetrično stanje v harmoničnem oscilatorju) sledi

$$F' = e^{-\beta z^2} - 2\beta z^2 e^{-\beta z^2} \tag{8}$$

ter

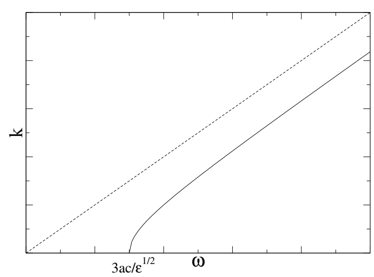
$$F'' = -2\beta z e^{-\beta z^2} - 4\beta z e^{-\beta z^2} + 4\beta^2 z^3 e^{-\beta z^2} = (-6\beta + 4\beta^2 z^2)F\ . \tag{9}$$

Diferencialna enačba za F je torej izpolnjena, če je

$$(-6\beta + 4\beta^2 z^2) + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(1 - a^2 z^2) - k^2 = 0 \tag{10}$$

za vse vrednosti z. Iz tega sledi $2\beta = (\sqrt{\epsilon} a\omega/c)a$ in $-6\beta + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k^2 = 0$, torej

$$k(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - 3\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon} a} \tag{11}$$



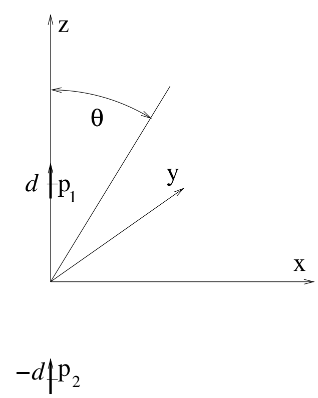
Opomba: s tem nastavkom smo dobili največji možni k pri dani frekvenci ω, oziroma najnižjo frekvenco pri danem k. Ostale rešitve bi imele z-odvisnost višjih lihih stanj v harmoničnem oscilatorju.

Naloga 2:
Električni dipol 1 se nahaja v točki (0,0,d) in ima časovno odvisnost $\mathbf{p}_1(t) = p\hat{e}_z e^{-i(\omega t+\delta)}$. Drugi dipol se nahaja v točki (0,0,$-d$) in niha kot $\mathbf{p}_2 = p\hat{e}_z e^{-i(\omega t-\delta)}$

a) Izračunajte gostoto izsevane moči, $dP/d\Omega$ kot funkcijo kota θ med smerjo sevanja in osjo z.

b) Naj bo sedaj $P_\uparrow$ celotna moč, izsevana v zgornji polprostor, torej $0 \le \theta \le \pi/2$ in $P_\downarrow$ moč izsevana v spodnji polprostor, $\pi/2 \le \theta \le \pi$. Določite fazo δ pri kateri bo razlika $P_\uparrow - P_\downarrow$ maksimalna.

   Nasvet: izraz za $P_\uparrow - P_\downarrow$ je preprostejši kot izraza za $P_\uparrow$ in $P_\downarrow$.



Rešitev:
Za vsak dipol posebej uporabimo izraz s predavanj (z lista):

$$\mathbf{B} \cong -\frac{\mu_0}{4\pi c|\mathbf{r}|}\left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \times \ddot{\mathbf{p}}(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c})\right) \tag{12}$$

Razdalja od dipola 1 do opazovalca je pri tem $r_1 \approx r - d\cos\theta$. Tako dobimo za prispevek prvega dipola

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 \omega^2 p}{4\pi c r}\left(\hat{n} \times \hat{e}_z\right) e^{i(kr - kd\cos\theta - \omega t - \delta)} \tag{13}$$

in analogno za drugi dipol

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 \omega^2 p}{4\pi c r}\left(\hat{n} \times \hat{e}_z\right) e^{i(kr + kd\cos\theta - \omega t + \delta)}\ . \tag{14}$$

Vsota je torej

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\omega^2 p}{4\pi c r}(\hat{n}\times\hat{e}_z)e^{i(kr-\omega t)}(e^{i(kd\cos\theta+\delta)} + e^{i(-kd\cos\theta-\delta)} = \frac{\mu_0\omega^2 p}{2\pi c r}\sin\theta(-\hat{e}_\phi)\cos(kd\cos\theta+\delta)\ . \tag{15}$$

Ker so na veliki razdalji valovi skoraj ravni, uporabimo

$$\mathbf{P} = \hat{n}\frac{c}{2\mu_0}\mathbf{B}\mathbf{B}^* = \frac{\mu_0\omega^4 p^2}{8\pi^2 c r^2}\sin\theta\cos^2(kd\cos\theta+\delta)\ . \tag{16}$$

Rezultat:

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2\hat{n}\mathbf{P} = \frac{\mu_0\omega^4 p^2}{8\pi^2 c}\sin^2\theta\cos^2(kd\cos\theta+\delta)\ . \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
P_\uparrow - P_\downarrow &= 2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mu_0\omega^4 p^2}{8\pi^2 c}\sin^2\theta\cos^2(kd\cos\theta+\delta)\sin\theta d\theta \\
&- 2\pi\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\mu_0\omega^4 p^2}{8\pi^2 c}\sin^2\theta\cos^2(kd\cos\theta+\delta)\sin\theta d\theta \\
&= \ldots\left(\int_0^1(1-u^2)\cos^2(kdu+\delta)du - \int_{-1}^0(1-u^2)\cos^2(k\,d\,u+\delta)du\right) \\
&= \ldots\int_0^1(1-u^2)(\cos^2(k\,d\,u+\delta)-\cos^2(-k\,d\,u+\delta))du
\end{aligned} \tag{18}$$

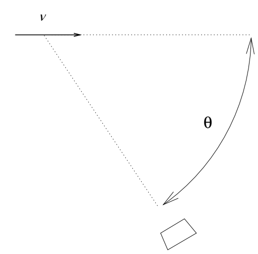
Uporabimo izraz iz priročnika: $\cos^2 x - \cos^2 y = \sin(y+x)\sin(y-x)$:

$$P_\uparrow - P_\downarrow = \ldots\int_0^1(1-u^2)\sin(2kd\,u)du(-\sin(2\delta)) \tag{19}$$

Ker je integral zmeraj pozitiven in neodvisen od δ, mora biti za maksimalno razliko $\sin(2\delta) = -1$ oziroma

$$\delta = -\frac{\pi}{4} \tag{20}$$

Naloga 3:
Curek polariziranih delcev s hitrostjo v v središču detektorja razpada z dipolnim prehodom, tako da je v inercialnem sistemu, v katerem delci mirujejo, kotna porazdelitev izsevanih fotonov proporcionalna $(1+\cos^2\theta)$. Določite kotno odvisnost porazdelitve števila fotonov ter njihove skupne energije v laboratorijskem sistemu. Zadošča kotna odvisnost obeh količin, brez predfaktorjev.



Rešitev:
Z θ' in ω' označimo količine v sistemu sevalca, z θ in ω pa v laboratorijskem sistemu.
Kot v knjigi (poglavje 14.18) iz Lorentzove transoformacije valovnega štirivektorja izpeljemo zvezi:

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta} \tag{21}$$

in

$$\omega' = \gamma\omega(1-\beta\cos\theta) \tag{22}$$

V sistemu sevalca velja

$$\frac{dn}{d\Omega'} \propto (1+\cos^2\theta')\ , \tag{23}$$

v laboratorijskem pa

$$\frac{dn}{d\Omega} = \frac{dn}{d\Omega'}\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{dn}{d\Omega'}\frac{d\cos\theta'}{d\cos\theta} \,. \tag{24}$$

Iz prve enačbe sledi

$$\frac{d\cos\theta'}{d\cos\theta} = \frac{1}{1-\beta\cos\theta} + \beta\frac{\cos\theta-\beta}{(1-\beta\cos\theta)^2} = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2} \tag{25}$$

in tako:

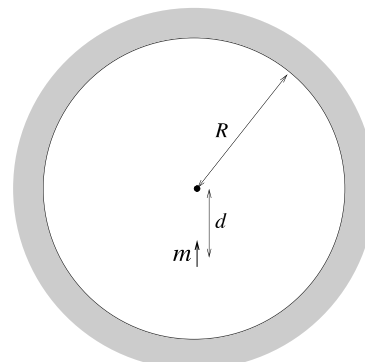
$$\frac{dn}{d\Omega} \propto \left(1 + \left(\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}\right)^2\right)\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^2} \tag{26}$$

Gostota energijskega toka fotonov je

$$\hbar\omega\frac{dn}{d\Omega} = \frac{\hbar\omega'}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}\frac{dn}{d\Omega} \propto \left(1 + \left(\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}\right)^2\right)\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3} \tag{27}$$

Dodatna naloga (4):

V votli superprevodni krogli (notranji radij R) se na razdalji d pod središčem na osi z nahaja magnetni dipol $\mathbf{m} = m\hat{e}_z$. V superprevodniku velja $\mathbf{B} = 0$.



a) Pokažite, da lahko robni pogoj na krogli izpolnite z metodo zrcaljenja in določite lego in velikost zrcalnega dipola.

b) Izračunajte silo med dipolom in kroglo. Posebej izrazite rezultat v limitah $d \ll R$ in $R - d \ll R$.

Rešitev:

Opomba: problem magnetnega dipola v superprevodni krogli je zahtevnejši kot problem električnega naboja/dipola v prevodni krogli. Rešitev z zrcaljenjem je možna edino če dipol kaže v smeri simetrijske osi, torej proti središču krogle (ali stran od njega). Za prečno postavljen dipol zrcalna slika ne obstaja in polje je potrebno npr. razviti po krogelnih funkcijah.

Iz simetrijskih razlogov tudi zrcalni dipol $\mathbf{m}'$ postavimo na os z, in sicer na razdaljo a pod središče krogle.

Robni pogoj na krogli je $\mathbf{B}\cdot\hat{e}_r = 0$, ker se na površini medija pravokotna komponenta polja $\mathbf{B}$ ohranja.

V nadaljevanju uporabimo oznako $\mathbf{r}$ za točko, kjer računamo polje, $\mathbf{d} = -d\hat{e}_z$ in $\mathbf{a} = -a\hat{e}_z$. Polje resničnega dipola je

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\mathbf{m}(\mathbf{r}-\mathbf{d}))(\mathbf{r}-\mathbf{d}) - \mathbf{m}(\mathbf{r}-\mathbf{d})^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|^5} \,. \tag{28}$$

Ker nas zanima le radialna komponenta izračunamo

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\mathbf{m}(\mathbf{r}-\mathbf{d}))((\mathbf{r}-\mathbf{d})\mathbf{r}) - (\mathbf{m}\mathbf{r})(\mathbf{r}-\mathbf{d})^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|^5} \,. \tag{29}$$

Če je θ kot med vektorjem $\mathbf{r}$ in osjo z, na površini krogle pa velja $|\mathbf{r}| = R$ dobimo sledeče izraze:

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}-\mathbf{d}) = m(R\cos\theta + d) \tag{30}$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{r}-\mathbf{d}) = R^2 + Rd\cos\theta \tag{31}$$

$$\mathbf{m}\mathbf{r} = mR\cos\theta \tag{32}$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{d}|^2 = R^2 + d^2 + 2Rd\cos\theta \tag{33}$$

Tako sledi:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3m(R\cos\theta+d)R(R+d\cos\theta)-mR\cos\theta(R^2+d^2+2Rd\cos\theta)}{(R^2+d^2+2Rd\cos\theta)^{5/2}} \tag{34}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{mR}{(Rd)^{3/2}}\frac{3(\cos\theta+d/R)(\cos\theta+R/d)-\cos\theta(R/d+d/R+2\cos\theta)}{(R/d+d/R+2\cos\theta)^{5/2}} \tag{35}$$

Analogno za zrcalni dipol sledi

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m'R}{(Ra)^{3/2}}\frac{3(\cos\theta+a/R)(\cos\theta+R/a)-\cos\theta(R/a+a/R+2\cos\theta)}{(R/a+a/R+2\cos\theta)^{5/2}} \; . \tag{36}$$

Vsota $\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}_1+\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}_2$ mora biti enaka nič za vse kote θ. Ta pogoj je izpolnjen, če imata isto ovisnost od θ, kar pomeni:

$$\frac{R}{d}+\frac{d}{R}=\frac{R}{a}+\frac{a}{R} \; . \tag{37}$$

Poleg trivialne (in nesmiselne) rešitve $a=d$ ima enačba še rešitev $R/d=a/R$ oziroma

$$a=\frac{R^2}{d} \; . \tag{38}$$

Mesto zrcalnega dipola je torej enako kot v elektrostatiki določeno z inverzijo na krogli.
Da bo vsota radialnih komponent polja res nič, mora veljati tudi

$$\frac{m}{d^{3/2}}=\frac{m'}{a^{3/2}}=0 \tag{39}$$

oziroma

$$m'=-m\frac{a^{3/2}}{d^{3/2}}=-m\left(\frac{R}{d}\right)^3 \; . \tag{40}$$

Ta rezultat pa se bistveno razlikuje od zrcalnega naboja v elektrostatiki.
Energija interakcije dveh resničnih magnetnih dipolov, ki sta poravnana vzdolž zveznice, je

$$W=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m_1m_2}{r^3} \tag{41}$$

iz česar sledi odbojna sila

$$F=-\frac{dW}{dr}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{6m_1m_2}{r^4} \; . \tag{42}$$

Opomba: v našem primeru imamo zrcalni dipol in je zato v resnici energija pol manjša, sila pa je ista. Ko vstavimo $m_1=m$, $m_2=m'$ in $r=a-d$ dobimo silo

$$F=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{6mm'}{(a-d)^4}=\frac{3\mu_0 m^2 dR^3}{2\pi(R^2-d^2)^4} \; . \tag{43}$$

Sila je odbojna, torej potiska dipol proti središču votline. Sedaj pogledamo še obe limiti:

$$F(d\ll R)\approx\frac{3\mu_0 m^2 d}{2\pi R^5} \tag{44}$$

$$F(d\approx R)\approx\frac{3\mu_0 m^2}{32\pi(R-d)^4} \; . \tag{45}$$

Drugi izraz je enak kot pri sili na dipol nad ravno ploščo.