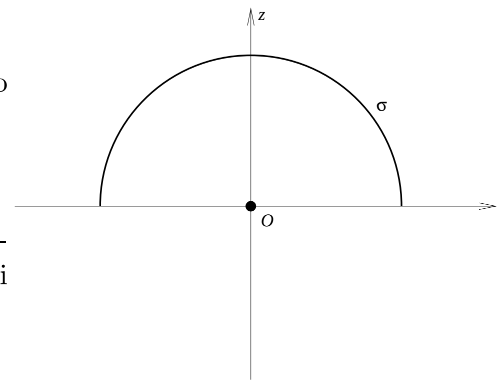
Asist. Andrej Vilfan

15. 2. 2013

Elektromagnetno polje: 1. popravni kolokvij



Naloga 1:
Polkrogla z radijem R je enakomerno nabita s površinsko gostoto naboja σ.

a) Določite električni potencial vzdolž celotne osi z.

b) Zapišite izraz za potencial v izhodišču (O) ter v limiti $z \to \infty$ (vodilni člen). Ta del lahko rešite tudi brez splošne rešitve (a).

c) Določite jakost električnega polja $\vec{E}$ v izhodišču.

Rešitev:

a)

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma dS}{|\vec{r} - z\hat{e}_z|} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi/2} \frac{2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta}} \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^1 \frac{2\pi R^2 du}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rzu}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{R^2}{2Rz}\left(2\sqrt{R^2+z^2} - 2\sqrt{R^2+z^2-2Rz}\right) \\ &= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |R - z|\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Izraz lahko preoblikujemo še v nekoliko lepšo obliko:

$$\varphi(z) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2} + |R - z|} \tag{2}$$

b) V limiti $z \to 0$ uporabimo Taylorjev razvoj:

$$\varphi(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z}\left(R + \frac{1}{2}\frac{z^2}{R} - (R - z)\right) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{2}\frac{z}{R} + 1\right) \tag{3}$$

$$\varphi(0) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \tag{4}$$

V limiti $z \to \infty$ pa:

$$\varphi(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z}\left(z + \ldots - z + R\right) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 z} \tag{5}$$

c) Zaradi simetrije je lahko polje v tej točki samo v smeri z. Tako je po enačbi (3)

$$\vec{E}(0) = -\hat{e}_z\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_0 = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0}\hat{e}_z \tag{6}$$

Naloga 2:

Krogla z radijem z radijem R je enakomerno magnetizirana, tako da ima skupni dipolni moment $\vec{m} = m\hat{e}_z$. Po površini je nabita z nabojem e, ki ves čas ostane enakomerno porazdeljen po površini. Zunaj krogle lahko uporabite izraz za magnetni potencial $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$.

a) Izračunajte celotno vrtilno količino elektromagnetnega polja.

b) V času T kroglo sedaj razmagnetimo (npr. s segrevanjem), tako da njena magnetizacija enakomerno pade na 0. Izračunajte dodatno električno polje, ki se inducira zaradi manjšanja magnetizacije.

c) Neodvisno od naloge (a) izračunajte navor, ki zaradi induciranega polja deluje na kroglo. Sunek navora primerjajte s spremembo vrtilne količine polja.

Rešitev: Zunaj krogle je električno polje

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{e}_r \tag{7}$$

in magnetno polje (polje dipola, z lista)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(3\hat{e}_r(\hat{e}_r\cdot\hat{e}_z) - \hat{e}_z) \tag{8}$$

Skupaj dobimo gostoto gibalne količine

$$\vec{g} = \epsilon_0\vec{E}\times\vec{B} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cdot\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\hat{e}_r\times(3\hat{e}_r(\hat{e}_r\cdot\hat{e}_z) - \hat{e}_z) = \frac{\mu_0 e m}{(4\pi)^2 r^5}\sin\theta\hat{e}_\phi \tag{9}$$

Vrtilna količina ima zaradi simetrije lahko le smer z. Njeno komponento z pa izračunamo kot

$$\Gamma_z = \hat{e}_z\int\vec{r}\times\vec{g}d^3r = \int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\int_R^\infty 2\pi r^2 dr\frac{\mu_0 e m}{(4\pi)^2 r^4}\sin^2\theta \tag{10}$$

$$= \int_{-1}^{1}(1-u^2)du\int_R^\infty\frac{1}{r^2}dr\frac{\mu_0 e m}{8\pi} = \frac{\mu_0 e m}{6\pi R} \tag{11}$$

Pri tem smo integrirali le zunaj krogle saj znotraj ni električnega polja in s tem vrtilne količine.
b) Inducirano električno polje najhitreje dobimo iz potenciala $\vec{A}$:

$$\vec{E}_i = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(-\frac{dm}{dt}\right)\hat{e}_z\times\hat{e}_r = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\frac{m}{T}\sin\theta\hat{e}_\phi \tag{12}$$

c) Navor zaradi induciranega polja je:

$$M_z = \hat{e}_z\oint dS\vec{r}\times(\sigma\vec{E}) = \int_{-1}^{1}d(\cos\theta)2\pi R^2\frac{\sigma\mu_0}{4\pi R}\frac{m}{T}\sin^2\theta = \frac{4}{3}\frac{\sigma\mu_0 R}{2}\frac{m}{T} = \frac{e\mu_0 m}{6\pi RT} \tag{13}$$

Vidimo, da je sunek navora na kroglo $T\,M_z$ res enak začetni vrtilni količini polja.

Naloga 3:

Krogla iz dielektrika z dielektrično konstanto ϵ se nahaja v zunanjem električnem polju $\vec{E} = E_0\hat{e}_z$. Polje znotraj in zunaj te krogle je podano z izrazoma:

$$\vec{E}_n = \frac{3}{\epsilon+2}E_0\hat{e}_z \qquad \vec{E}_z = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}E_0\frac{R^3}{r^3}(3\hat{e}_r(\hat{e}_r\cdot\hat{e}_z) - \hat{e}_z) + E_0\hat{e}_z$$

Kroglo sedaj prerežemo na pol v ravnini $x-y$. Določite silo, ki deluje med polovicama krogle. Povejte, ali je privlačna ali odbojna. Nasvet: *Računajte pametno.*
Rešitev:
Na površini reže, ki ločuje polovici, velja $\hat{e}_z(\vec{D}_r-\vec{D}_n)=0$, pri čemer je $D_r=\epsilon_0 E_r$ in $D_n=\epsilon\epsilon_0 E_n$. Iz tega sledi, da je polje v reži:

$$\vec{E}_r=\frac{3\epsilon}{\epsilon+2}E_0\hat{e}_z \tag{14}$$

Celoten naboj na vsaki polovici krogle je nič, tako da homogeno zunanje polje nanju ne deluje s silo. Edina sila, ki deluje na polovici, je torej posledica polja, ki ga povzroča polariziran dielektrik. Zato lahko pri računanju sile zunanje polje odštejemo, vendar tako, da bo polarizacija in njen prispevek k polju ostala nespremenjena (!).
Polji brez prispevka zunanjega polja v reži in zunaj krogle sta torej:

$$\vec{E}'_r=\frac{3\epsilon}{\epsilon+2}E_0\hat{e}_z-E_0\hat{e}_z=2\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}E_0\hat{e}_z=:2E_1\hat{e}_z \tag{15}$$

$$\vec{E}'_z=\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}E_0\frac{R^3}{r^3}(3\hat{e}_r(\hat{e}_r\cdot\hat{e}_z)-\hat{e}_z)=E_1\frac{R^3}{r^3}(3\hat{e}_r(\hat{e}_r\cdot\hat{e}_z)-\hat{e}_z) \tag{16}$$

Računamo z napetostnim tenzorjem, in sicer zgornjo polovičko zaobjamemo po ravnini $x-y$ ter površino zaključimo po polkrogli pri velikem radiju, kjer je polje zanemarljivo. To je seveda možno le, ker smo odšteli zunanje polje. Drugače bi morali integrirati npr. po površini velikega valja in upoštevati tudi zgornjo ploskev.
V ravnini $x-y$ je $\hat{e}_r\cdot\hat{e}_z=0$, tako da velja

$$\vec{E}'_z=-E_1\frac{R^3}{r^3}\hat{e}_z \tag{17}$$

Sila na zgornjo polovico je tako:

$$\begin{aligned}F&=-\int T_{zz}dS=-\frac{\epsilon_0}{2}\left(\pi R^2(E'_r)^2+\int_R^\infty 2\pi r dr(E'_z(r))^2\right)=-\frac{\epsilon_0}{2}E_1^2\left(4\pi R^2+2\pi\int_R^\infty r\frac{R^6}{r^6}dr\right)\\&=-\frac{\epsilon_0}{2}E_1^2\left(4\pi R^2+2\pi\frac{R^6}{4R^4}\right)=-\frac{9}{4}\pi R^2\epsilon_0 E_1^2=-\frac{9}{4}\pi R^2\epsilon_0\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2E_0^2\end{aligned} \tag{18}$$

Negativni predznak pomeni, da sila na zgornjo polovico deluje v negativni z smeri, torej je privlačna.

Čas reševanja: 90 min
Dovoljeni pripomočki: enoten list z enačbami, matematični priročniki in zbirke matematičnih enačb (po lastni izbiri), žepni računalnik brez zmožnosti brezžične komunikacije.